

Zusammenfassung

Anstieg einer Funktion in einem Punkt

Begriffe

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ werden als **Differenzenquotienten** bezeichnet.

Der Differenzenquotient gibt den **Anstieg einer Sekante** an, die durch die Punkte $A(x_0; f(x_0))$ und $B(x; f(x))$ geht.

Hinweise:

- ☉ Die Punkte A und B liegen auf der Funktion $f(x)$
- ☉ $h = x - x_0$ ist der Abstand der x - Koordinaten der Punkte A und B

Bildet man vom Differenzenquotienten den Grenzwert (Übergang von Sekante zu Tangente) so erhält man den **Differentialquotienten**:

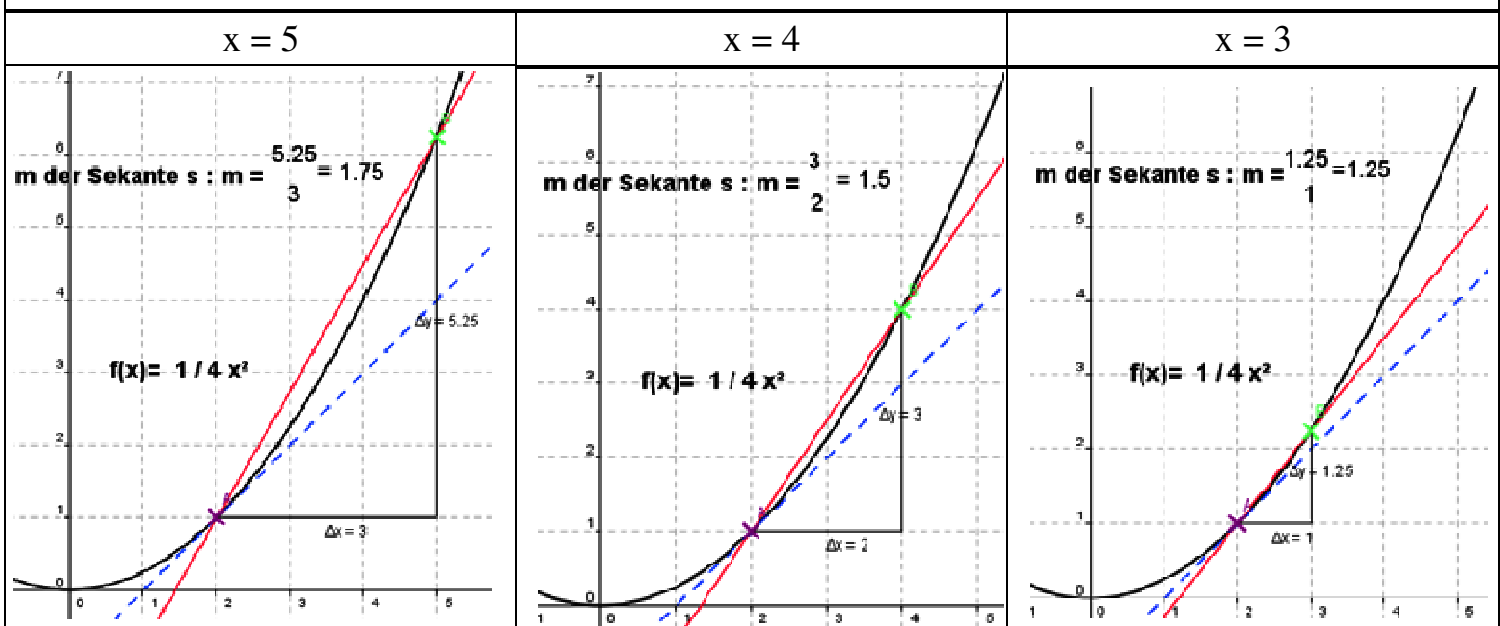
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Die so berechnete Zahl gibt den **Anstieg der Tangente** an die Funktion f an der Stelle x_0 an.

Dieser Anstieg der Funktion f an der Stelle x_0 wird als **Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0** bezeichnet.

Schreibweise: $f'(x_0)$

Darstellung des Grenzübergangs am Beispiel der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ für die Stelle $x_0 = 2$



Die Sekante nähert sich für $x \rightarrow x_0$ bzw. $h \rightarrow 0$ der Tangente an!

Berechnung des Anstiegs an einer Stelle

Ziel	Berechne den Anstieg einer Funktion f an der Stelle x_0 !
Weg	<p>1. notiere $f(x)$ 2. berechne $f(x_0)$ und $f(x_0 + h)$ mit $h \in \mathbb{R}, h > 0$ 3. Berechne den Grenzwert</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ </div> <div style="text-align: center;">oder</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ </div> </div>
Beispiel	<p>Berechne den Anstieg der Funktion $f(x) = 4x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$!</p> <p>1. $f(x) = 4x^2$ 2. $f(x_0) = f(3) = 4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$ $f(x_0 + h) = f(3 + h) = 4 \cdot (3 + h)^2$ 3. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \cdot (3+h)^2 - 36}{h}$ $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \cdot (9 + 2 \cdot 3h + h^2) - 36}{h}$ $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{36 + 24h + 4h^2 - 36}{h}$ $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (24 + 4h)}{h}$ $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} 24 + 4h$ $f'(3) = 24$ </div> <div style="width: 50%;"> <p>(einsetzen von 1. und 2.)</p> <p>(binomische Formel)</p> <p>(Klammer ausmultiplizieren)</p> <p>(h im Zähler ausklammern)</p> <p>(h kürzen)</p> <p>(Grenzwert $h \rightarrow 0$ berechnen)</p> </div> </div>
Antwort	Der Anstieg der Funktion $f(x) = 4x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$ beträgt 24.
Übungen	<p>1. Berechne den Anstieg der Funktion $f(x) = 3x^3$ an der Stelle $x_0 = 3$. <i>(Ergebnis: $f'(3) = 81$)</i></p> <p>2. Berechne den Anstieg der Funktion $f(x) = 3x^3 + 4x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$. <i>(Ergebnis: $f'(3) = 105$)</i></p> <p>3. Vergleiche die Ergebnisse aus dem Beispiel und aus 1. mit dem Ergebnis von 2.! <i>($105 = 24 + 81$)</i></p> <p>4. Berechne den Anstieg der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$. Hinweis: rechne mit $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ <i>(Ergebnis: $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$)</i></p>